FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Mathematische Objekte: Komplexe Zahlen

Vorlesung

Komplexe Zahlen - Darstellungsformen

Inhaltsübersicht

Themen:

- Trigonometrische oder Polarform
- Exponentialform
- Wechsel zwischen den Formen
- Geometrische Multiplikation und Division
- Wann verwende ich welche Darstellungsform?

Komplexe Zahlen

Geometrische Interpretation der Multiplikation

Bisher haben wir komplexe Zahlen in der sogenannten

algebraischen Form $z = a + bi$

betrachtet…

⇒ keine geometrische Interpretation der Multiplikation möglich

⇒ Wir definieren zwei weitere Darstellungsformen…

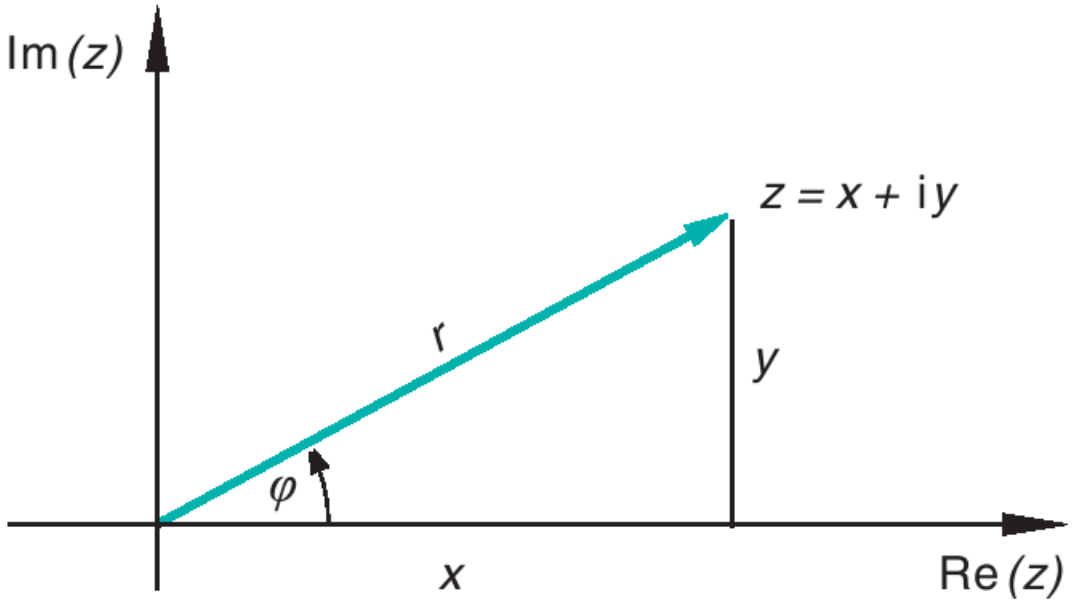
Komplexe Zahlen

Trigonometrische oder Polarform

Gauß'sche Ebene:

$$\sin\varphi = \frac{\text{Gegenkathete des Winkel } \varphi}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos\varphi = \frac{\text{Ankathete des Winkel } \varphi}{\text{Hypotenuse}}$$

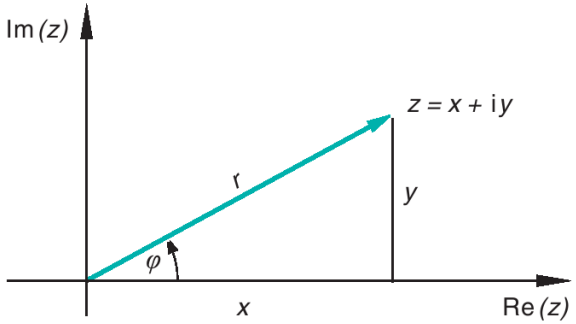


Damit erhalten wir für Realteil x und Imaginärteil y:

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Komplexe Zahlen

Trigonometrische oder Polarform



Definition:

Die folgende Darstellungsform heißt trigonometrische Form oder Polarform:

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) \qquad \text{mit} \qquad r \geq 0 \quad \text{und} \quad \varphi \in [0,2\pi)$$

Bemerkung 2.28 *i) Der Winkel φ ist für $z = 0$ nicht eindeutig festgelegt.*

ii) Wir weisen darauf hin, dass in technischen Anwendungen der Hauptwert des Winkels oft auch im Bereich $\varphi \in (-\pi, \pi]$ festgelegt wird. In diesem Fall müssen die folgenden Formeln entsprechend abgeändert werden.

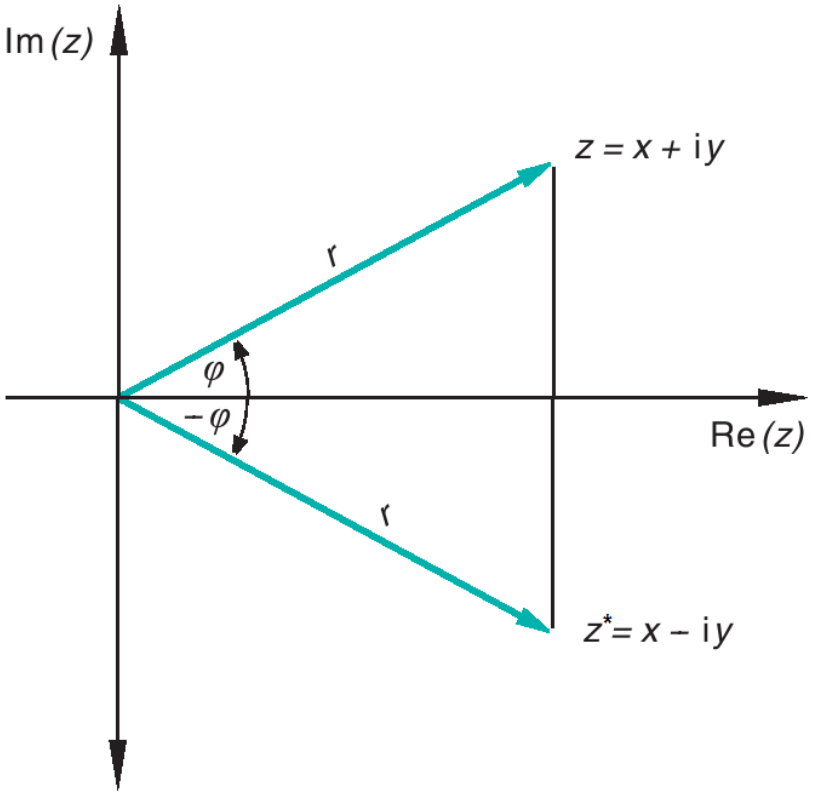
Komplexe Zahlen

Trigonometrische oder Polarform

Komplex konjugierte Zahl:

$$z = x + iy$$

$$z^* = x - iy$$



Polarform:

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

$$z^* = r \cdot (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$$

$$= r \cdot (\cos\varphi - i \sin\varphi)$$

Komplexe Zahlen

Wechsel zwischen trigonometrischer und algebraischer Form

Gegeben: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (trig. Form)

Gesucht: $z = a + ib$ (alg. Form)

Ein Vergleich der Darstellungen ergibt den einfachen Zusammenhang:

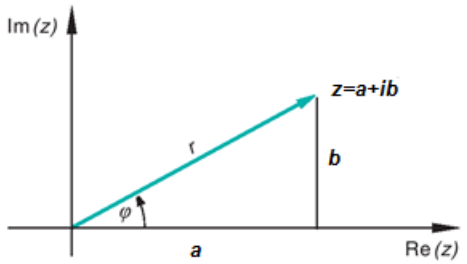
$$a = r\cos\varphi \qquad b = r\sin\varphi$$

Komplexe Zahlen

Wechsel zwischen trigonometrischer und algebraischer Form

Gegeben: $z = a + ib$ (alg. Form)

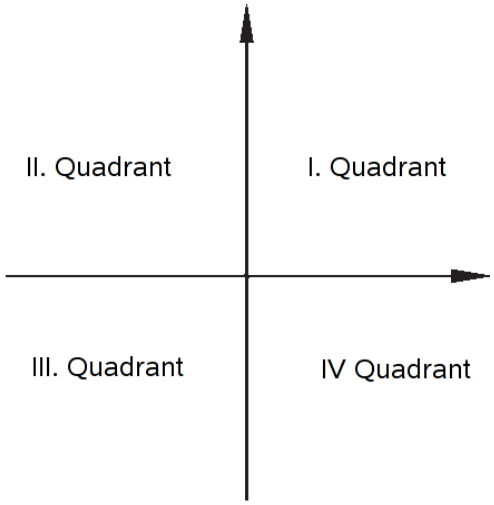
Gesucht: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (trig. Form)



Aus der Skizze erhalten wir:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Der Winkel ergibt sich aus folgender Tabelle:



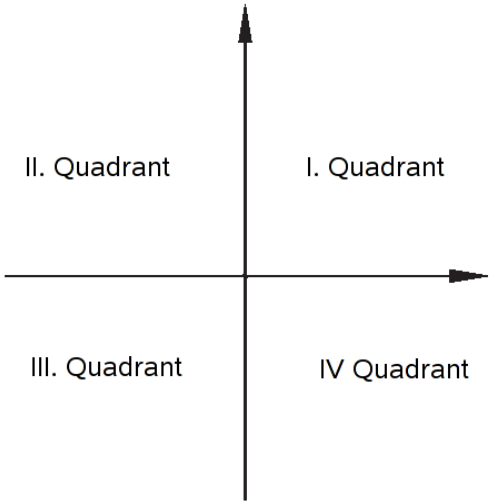
Quadrant	I	II, III	IV
Winkel φ	$\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$	$\arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$	$\arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 2\pi$

Komplexe Zahlen

Wechsel zwischen trigonometrischer und algebraischer Form

Beispiel:

Wir betrachten $z = 2 + 3i$



Dann gilt zunächst: $r = \sqrt{2^2 + 3^3} = \sqrt{13}$

z liegt im I. Quadranten…

Quadrant	I	II, III	IV
Winkel φ	$\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$	$\arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$	$\arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 2\pi$

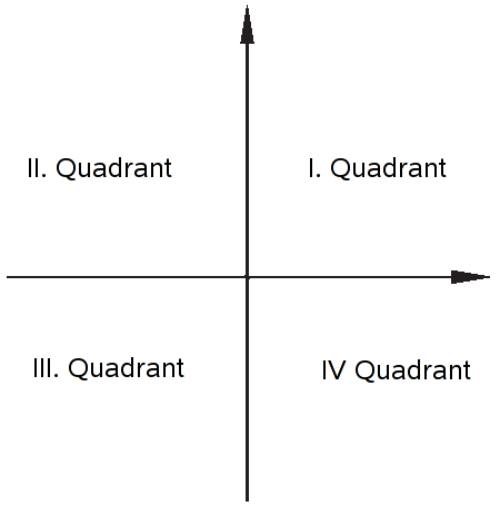
$$\varphi = \arctan\frac{3}{2} = 0.9828 \mathrel{\hat{=}} 56.31°$$

Komplexe Zahlen

Wechsel zwischen trigonometrischer und algebraischer Form

Beispiel:

Wir betrachten $z = -3 - 2i$



Dann gilt zunächst: $r = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^3} = \sqrt{13}$

z liegt im III. Quadranten…

Quadrant	I	II, III	IV
Winkel φ	$\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$	$\arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$	$\arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 2\pi$

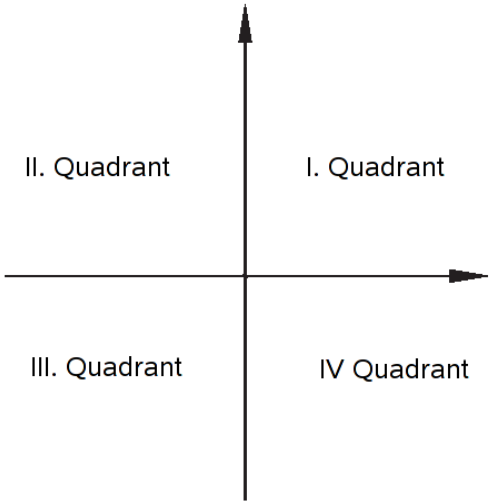
$$\varphi = \arctan\frac{-2}{-3} + \pi = 0.588 + \pi = 3.7296 \mathrel{\hat{=}} 213,69°$$

Komplexe Zahlen

Wechsel zwischen trigonometrischer und algebraischer Form

Sie sind an der Reihe…

Wir betrachten $z = 4 - 3i$



Komplexe Zahlen

Multiplikation in trigonometrischer Form

Wir betrachten: $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ und $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

Wir multiplizieren wie gewohnt aus:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left((\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2)\right)$$

Wir wenden Additionstheoreme an (Formelsammlung):

$$\begin{aligned} \cos(x \pm y) &= \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y \\ \sin(x \pm y) &= \sin x \cdot \cos y \pm \sin y \cdot \cos x \end{aligned}$$



$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$$

Komplexe Zahlen

Multiplikation in trigonometrischer Form

Die Multiplikation von

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \qquad \text{und} \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

in trigonometrischer Form ergibt:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$$

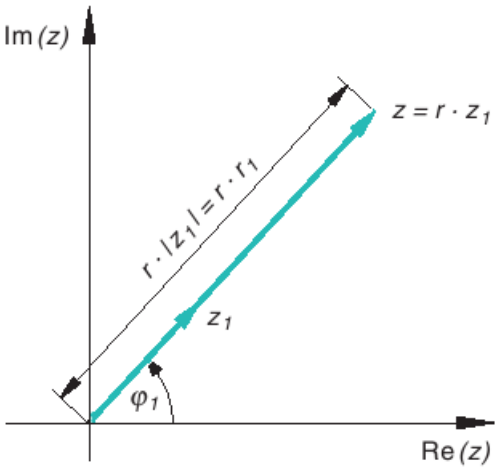
1. Fall:

Wir multiplizieren z_1 mit einer reellen Zahl $r > 0$

➡ Es ändert sich die Zeigerlänge um r

$r > 1$ Zeiger wird gestreckt

$r < 1$ Zeiger wird gestaucht



Komplexe Zahlen

Multiplikation in trigonometrischer Form

Die Multiplikation von

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \qquad \text{und} \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

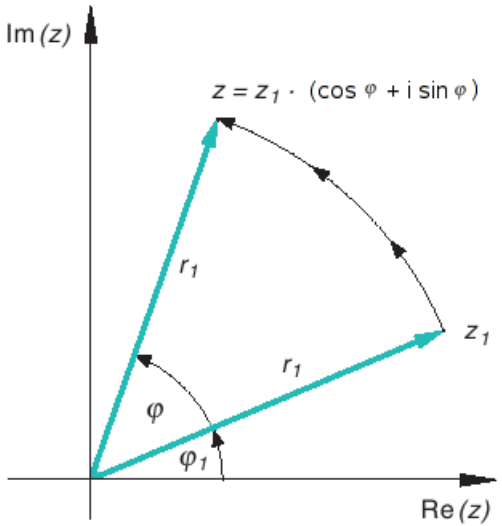
in trigonometrischer Form ergibt:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$$

2. Fall:

Wir multiplizieren z_1 mit $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$

⇒ Der Zeiger wird um φ gegen den Uhrzeigersinn gedreht



Komplexe Zahlen

Multiplikation in trigonometrischer Form

Die Multiplikation von

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \qquad \text{und} \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

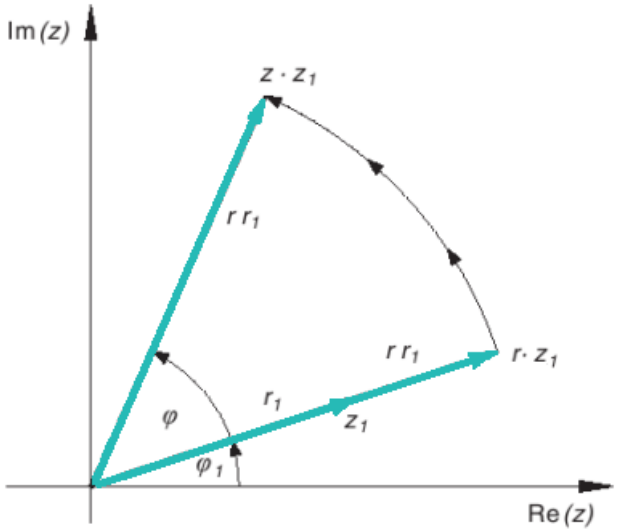
in trigonometrischer Form ergibt:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$$

3. Fall:

Wir multiplizieren z_1 mit $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

- Wir erhalten eine Kombination der Fälle
- Die Zeigerlänge wird um r geändert
- Der Zeiger wird um φ gedreht



Komplexe Zahlen

Division in trigonometrischer Form

Da die Division die Inverse Operation zur Multiplikation ist, können wir sie auch als Drehstreckung auffassen…

Wir betrachten: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$\frac{1}{z} = \frac{r(\cos\varphi - i\sin\varphi)}{r^2(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot(\cos\varphi - i\sin\varphi)} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$$

Bei der Division durch z wird also:

- die Zeigerlänge durch den Faktor $\frac{1}{r}$ geändert

- der Zeiger um den Winkel $-\varphi$ gedreht

Komplexe Zahlen

Exponentialform

Die dritte Darstellungsform für komplexe Zahlen ist die Exponentialform.

Sie beruht auf der Euler‘schen Formel:

Satz 2.31 (Eulersche Formel) *Zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen besteht folgender Zusammenhang:*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,, \quad \varphi \in \mathbb{R}\,.$$

Hierbei bezeichnen wir mit $e = 2.7182\ldots$ *die nach Euler benannte Eulersche Zahl.*



Leonhard Euler
(1707-1783)

Komplexe Zahlen

Exponentialform

Die dritte Darstellungsform für komplexe Zahlen ist die Exponentialform.

Sie beruht auf der Euler‘schen Formel:

Satz 2.31 (Eulersche Formel) *Zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen besteht folgender Zusammenhang:*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,, \quad \varphi \in \mathbb{R}\,.$$

Hierbei bezeichnen wir mit $e = 2.7182\ldots$ *die nach Euler benannte Eulersche Zahl.*

Gehen wir von der trigonometrischen Form aus $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

erhalten wir $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$

Komplexe Zahlen

Bemerkungen zur Eulerschen Formel

Satz 2.31 (Eulersche Formel) *Zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen besteht folgender Zusammenhang:*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,, \quad \varphi \in \mathbb{R}\,.$$

Hierbei bezeichnen wir mit $e = 2.7182\ldots$ *die nach Euler benannte Eulersche Zahl.*



Die folgende Gleichung folgt direkt aus der Eulerschen Formel, indem wir $\varphi = \pi$ *setzen:*

$$e^{i\pi} = -1\,.$$



Durch den Zusammenhang

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,, \quad \varphi \in \mathbb{R}\,.$$

ist im Komplexen die Exponentialfunktion 2π*-periodisch, wie Sinus und Kosinus im Reellen. Es gilt also für* $k \in \mathbb{Z}$*:*

$$e^{i\varphi} = e^{i(\varphi+2k\pi)}\,. \tag{2.15}$$

Komplexe Zahlen

Anwendung der Exponentialform

Wir wollen die folgenden komplexen Zahlen multiplizieren:

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} \text{ und } z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$$

Wir rechnen wie gewohnt mit der Exponentialfunktion…

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} \\ &= r_1 r_2 \, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{aligned}$$

Woraus wir mit der Euler‘schen Formel dann wieder Folgendes erhalten:

$$r_1 r_2 \, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i \sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$$

Komplexe Zahlen

Anwendung der Exponentialform

Wir wollen die folgenden komplexen Zahlen multiplizieren:

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} \text{ und } z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$$

Wir rechnen wie gewohnt mit der Exponentialfunktion…

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} \\ &= r_1 r_2 \, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{aligned}$$

Woraus wir mit der Euler‘schen Formel dann wieder Folgendes erhalten:

$$r_1 r_2 \, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i \sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$$